

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Магистерская диссертация

Решение задачи о релаксации для
газа с функцией распределения,
зависящей от модуля скорости

Выполнил
Арабули Г.З.

Научный руководитель
доцент Рыков В.А.

Москва
2013

Содержание

1	Введение	2
1.1	Уравнение Больцмана	2
2	Постановка задачи	3
2.1	Уравнение Больцмана	3
2.2	Обезразмеривание уравнения Больцмана	3
2.3	Интеграл столкновений, зависящий от квадрата скорости .	4
2.4	Метод конечных элементов	4
2.5	Система дискретных уравнений на n_k	5
3	Тензор столкновений	6
3.1	Расчет интеграла столкновений	6
3.2	Тензор столкновений	8
3.3	Вычисление компонентов тензора столкновений	8
3.4	Корректировка тензора столкновений	9
4	Решение задачи о релаксации	11
4.1	Общий алгоритм решения	11
4.2	Построение общего вида допустимых начальных условий .	11
4.3	Примеры расчета задачи о релаксации при различных начальных условиях	12
5	Заключение	14

1 Введение

1.1 Уравнение Больцмана

2 Постановка задачи

2.1 Уравнение Больцмана

Исходное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t, V)}{\partial t} = & 2\pi^2 d^2 \left(\int_0^V \int_{\sqrt{V^2-x^2}}^V f(x)f(y) \frac{4\sqrt{x^2+y^2-V^2}}{V} y dy dx + \right. \\ & + \int_V^\infty f(x)2x dx \cdot \int_V^\infty f(y)2y dy + \int_0^V f(x) \frac{4x^2}{V} dx \cdot \int_V^\infty f(x)2x dx) - \\ & \left. - f(V) \int_0^\infty f(x) \frac{(V+x)^3 - |V-x|^3}{3V} x dx \right) \quad (2.1) \end{aligned}$$

2.2 Обезразмеривание уравнения Больцмана

Для обезразмеривания уравнения (2.1) введем обозначения, аналогичные тем, которые вводились в работе [1]:

$$\begin{aligned} V &= V_0 \cdot V', \quad n = n_0 \cdot n', \quad t = \tau_0 \cdot t' \\ V_0 &= \left(\frac{2kT_0}{m} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f = \frac{n_0}{V_0^3} \cdot f' \\ \lambda_0 &= \frac{1}{n_0 \cdot \pi d^2}, \quad \tau_0 = \frac{\lambda_0}{V_0} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где n_0, T_0 - характерные плотность и температура. Уравнение (2.1), записанное в безразмерных переменных с отброшенными штрихами, примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t, V)}{\partial t} = & 2\pi \left(\int_0^V \int_{\sqrt{V^2-x^2}}^V f(x)f(y) \frac{4\sqrt{x^2+y^2-V^2}}{V} y dy dx + \right. \\ & + \int_V^\infty f(x)2x dx \cdot \int_V^\infty f(y)2y dy + \int_0^V f(x) \frac{4x^2}{V} dx \cdot \int_V^\infty f(x)2x dx) - \\ & \left. - f(V) \int_0^\infty f(x) \frac{(V+x)^3 - |V-x|^3}{3V} x dx \right) \quad (2.3) \end{aligned}$$

2.3 Интеграл столкновений, зависящий от квадрата скорости

Для упрощения дальнейших вычислений перейдем от интеграла столкновений, зависящего от модуля скорости, к интегралу столкновений, зависящему от квадрата модуля скорости. Для этого выполним замену переменных:

$$\begin{aligned} v &= V^2, & p &= x^2, & s &= y^2 \\ \sqrt{v} &= V, & \sqrt{p} &= x, & \sqrt{s} &= y \end{aligned} \quad (2.4)$$

Тогда, делая подстановку из (2.4) в (2.3) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t, v)}{\partial t} &= 2\pi \left(\int_0^v \int_{v-p}^v f(p) f(s) \frac{\sqrt{p+s-v}}{\sqrt{v}} ds dp + \right. \\ &+ \int_v^\infty f(p) dp \cdot \int_v^\infty f(s) ds + \int_0^v f(p) \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{v}} dp \cdot \int_v^\infty f(s) ds + \int_0^v f(s) \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{v}} ds \cdot \int_v^\infty f(p) dp - \\ &\left. - f(v) \int_0^\infty f(p) \frac{(\sqrt{v} + \sqrt{x})^3 - |\sqrt{v} - \sqrt{x}|^3}{6\sqrt{v}} dp \right) \quad (2.5) \end{aligned}$$

2.4 Метод конечных элементов

Для перехода от уравнения на функцию распределения к уравнению на концентрации воспользуемся методом конечных элементов. Разобьем пространство скоростей на N ячейки с центрами в точках v_k с шагом Δv :

$$v_k = \frac{\Delta v}{2} + k \cdot \Delta v \quad (2.6)$$

И посчитаем количество частиц n_k в каждой из этих ячеек, и введем дискретную функцию распределения f_k

$$n_k = \int_{v_k - \frac{\Delta v}{2}}^{v_k + \frac{\Delta v}{2}} 2\pi f(v) \sqrt{v} dv = 2\pi f_k \sqrt{v_k}, \quad f_k = \frac{n_k}{2\pi \sqrt{v_k}} \quad (2.7)$$

Функцию распределения $f(v)$ можно представить в виде:

$$f(v) = \sum_{k=1}^N f_k \cdot \delta(v - v_k) \quad (2.8)$$

Тогда, очевидно, что $f(v_k) = f_k$. В дальнейшем оба этих обозначения будут равноправными, однако для удобства мы перейдем от уравнения на функцию распределения к системе уравнений на число частиц n_k

2.5 Система дискретных уравнений на n_k

Для перехода от уравнения на функцию распределения к системе уравнений на плотности n_k , возьмем производную по времени от выражения (2.7):

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = \int_{v_k - \frac{\Delta v}{2}}^{v_k + \frac{\Delta v}{2}} 2\pi \frac{\partial f(v)}{\partial t} \sqrt{v} dv \quad (2.9)$$

Поставляя в интеграл (2.9) уравнение (2.3) получим систему N уравнений, описывающих релаксацию газа в каждой ячейке:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_k}{\partial t} = & \int_{v_k - \frac{\Delta v}{2}}^{v_k + \frac{\Delta v}{2}} 4\pi^2 \left(\int_0^v \int_{v-p}^v f(p)f(s)\sqrt{p+s-v} ds dp + \right. \\ & + \sqrt{v} \int_v^\infty f(p) dp \cdot \int_v^\infty f(s) ds + \int_0^v f(p)\sqrt{p} dp \cdot \int_v^\infty f(s) ds + \int_0^v f(s)\sqrt{s} ds \cdot \int_v^\infty f(p) dp - \\ & \left. - f(v) \int_0^\infty f(p) ((\sqrt{v} + \sqrt{x})^3 - |\sqrt{v} - \sqrt{x}|^3) dp \right) dv \quad (2.10) \end{aligned}$$

Главная сложность при решении этой системы уравнений состоит в подсчете тройного интеграла столкновений. В следующем разделе мы выполним его точный расчет, выполнив подстановку выражения (2.8)

3 Тензор столкновений

3.1 Расчет интеграла столкновений

Для вычисления интеграла столкновений, стоящего в правой части выражения (2.10), разобьем его на четыре интеграла и посчитаем их отдельно. Для этого выполним замену $f(v)$ из (2.8) и воспользуемся свойством δ -функции:

$$\int_a^b f(x) \cdot \delta(y - x) dx = \begin{cases} f(y), & a < y < b \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (3.11)$$

Отдельно отметим, что вычислять пятый интеграл нет необходимости, так как его значение мы подберем исходя из законов сохранения.

$$\begin{aligned} I_{1k} &= 4\pi^2 \int_{v_k - \frac{\Delta v}{2}}^{v_k - \frac{\Delta v}{2}} \int_0^v \int_{v-p}^v f(p) f(s) \sqrt{p + s - v} ds dp dv = \\ &= 4\pi^2 \int_{v_k - \frac{\Delta v}{2}}^{v_k - \frac{\Delta v}{2}} \int_0^v \int_{v-p}^v \sum_{m=1}^N f(v_m) \delta(p - v_m) \cdot \sum_{l=1}^N f(v_l) \delta(s - v_l) \sqrt{p + s - v} ds dp dv = \\ &= 4\pi^2 \int_{v_k - \frac{\Delta v}{2}}^{v_k - \frac{\Delta v}{2}} \int_0^v \sum_{m=1}^N f(v_m) \delta(p - v_m) \cdot \sum_{l: v_l > v - v_m}^k f(v_l) \sqrt{p + v_l - v} dp dv = \\ &= 4\pi^2 \int_{v_k - \frac{\Delta v}{2}}^{v_k - \frac{\Delta v}{2}} \sum_{m=1}^k f(v_m) \left(\sum_{l: v_l > v - v_m}^k f(v_l) \sqrt{v_m + v_l - v} \right) dv = \\ &= 4\pi^2 \sum_{m=1}^k (f(v_m) \sum_{l: v_l > v_k - v_m}^k \left(\int_{v_k - \frac{\Delta v}{2}}^{v_k - \frac{\Delta v}{2}} f(v_l) \sqrt{v_m + v_l - v} dv \right)) = \\ &= 4\pi^2 \frac{2}{3} \sum_{m=1}^k (f(v_m) \sum_{l: v_l > v_k - v_m}^k (f(v_l) \left((v_l + v_m - v_k + \frac{\Delta v}{2})^{\frac{3}{2}} - (v_l + v_m - v_k - \frac{\Delta v}{2})^{\frac{3}{2}} \right))) = \\ &= \frac{2}{3} \sum_{m=1}^k \left(\frac{n_m}{\sqrt{v_m}} \sum_{l: v_l > v_k - v_m}^k \left(\frac{n_l}{\sqrt{v_l}} \left((v_l + v_m - v_k + \frac{\Delta v}{2})^{\frac{3}{2}} - (v_l + v_m - v_k - \frac{\Delta v}{2})^{\frac{3}{2}} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
I_{2k} &= 4\pi^2 \int_{v_k - \frac{\Delta v}{2}}^{v_k + \frac{\Delta v}{2}} \sqrt{v} \int_v^\infty f(p) dp \cdot \int_v^\infty f(s) ds dv = \\
&= 4\pi^2 \int_{v_k - \frac{\Delta v}{2}}^{v_k + \frac{\Delta v}{2}} \sqrt{v} \int_v^\infty \sum_{m=1}^N f(v_m) \delta(p - v_m) dp \cdot \int_v^\infty \sum_{l=1}^N f(v_l) \delta(s - v_l) ds = \\
&= 4\pi^2 \int_{v_k - \frac{\Delta v}{2}}^{v_k + \frac{\Delta v}{2}} \sum_{m=k}^N (f(v_m)) \sum_{l=k}^N (f(v_l)) \sqrt{v} dv = \\
&= 4\pi^2 \frac{2}{3} \sum_{m=k}^N (f(v_m)) \sum_{l=k}^N (f(v_l)) \left((v_k + \frac{\Delta v}{2})^{\frac{3}{2}} - (v_k - \frac{\Delta v}{2})^{\frac{3}{2}} \right) = \\
&= 4\pi^2 \frac{2}{3} \left((v_k + \frac{\Delta v}{2})^{\frac{3}{2}} - (v_k - \frac{\Delta v}{2})^{\frac{3}{2}} \right) \cdot \left(\sum_{l=k}^N f(v_l) \right)^2 = \\
&= \frac{2}{3} \left((v_k + \frac{\Delta v}{2})^{\frac{3}{2}} - (v_k - \frac{\Delta v}{2})^{\frac{3}{2}} \right) \cdot \left(\sum_{l=k}^N \frac{n_l}{\sqrt{v_l}} \right)^2 \quad (3.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{3k} &= 4\pi^2 \int_{v_k - \frac{\Delta v}{2}}^{v_k + \frac{\Delta v}{2}} \left(\int_0^v f(p) \sqrt{p} dp \right) \cdot \left(\int_v^\infty f(s) ds \right) dv = \\
&= 4\pi^2 \int_{v_k - \frac{\Delta v}{2}}^{v_k + \frac{\Delta v}{2}} \int_0^v \sum_{l=1}^N f(v_l) \delta(p - v_l) \sqrt{p} dp \cdot \int_v^\infty \sum_{m=1}^N f(v_m) \delta(s - v_m) ds = \\
&= 4\pi^2 \int_{v_k - \frac{\Delta v}{2}}^{v_k + \frac{\Delta v}{2}} \sum_{l=1}^k (f(v_l) \sqrt{v_l}) \cdot \sum_{m=k}^N f(v_m) dv = \\
&= 4\pi^2 \Delta v \cdot \sum_{l=1}^k (f(v_l) \sqrt{v_l}) \cdot \sum_{m=k}^N f(v_m) = \\
&= \Delta v \cdot \sum_{l=1}^k (n_l) \cdot \sum_{m=k}^N \left(\frac{n_m}{\sqrt{v_m}} \right) \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Четвертый интеграл отличается от предыдущего только индексами, поэтому повторять выкладки мы не будем и просто приведем результат.

$$I_{4k} = 4\pi^2 \Delta v \cdot \sum_{m=1}^k (f(v_m) \sqrt{v_m}) \cdot \sum_{m=l}^N f(v_l) = \Delta v \cdot \sum_{m=1}^k (n_m) \cdot \sum_{l=k}^N \left(\frac{n_l}{\sqrt{v_l}} \right) \quad (3.15)$$

3.2 Тензор столкновений

Нашей целью будет записать уравнение (2.10) в виде:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = A_{i,j}^k n_i n_j - n_k B_i^k n_i \quad (3.16)$$

Здесь опущено суммирование по индексам i, j . Коэффициенты $A_{i,j}^k$ вычислим из интегралов посчитанных в предыдущем разделе, а B_i^k из условия сохранения числа частиц.

3.3 Вычисление компонентов тензора столкновений

Компоненты тензора $A_{i,j}^k$ представим в виде:

$$A_{i,j}^k = A_{i,j}^{1k} + A_{i,j}^{2k} + A_{i,j}^{3k} + A_{i,j}^{4k} \quad (3.17)$$

где $A_{i,j}^{1k}, A_{i,j}^{2k}, A_{i,j}^{3k}, A_{i,j}^{4k}$ коэффициентам пред n_{ij} в интегралах (3.12), (3.13), (3.14) и (3.15):

$$A_{i,j}^{1k} = \begin{cases} \frac{2}{3\sqrt{v_i v_j}} \left((v_i + v_j - v_k + \frac{\Delta v}{2})^{\frac{3}{2}} - (v_i + v_j - v_k - \frac{\Delta v}{2})^{\frac{3}{2}} \right); & v_i + v_j > v_k \\ 0; & v_i + v_j \leq v_k \end{cases} \quad (3.18)$$

$$A_{i,j}^{2k} = \begin{cases} \frac{2}{3\sqrt{v_i v_j}} \left((v_k + \frac{\Delta v}{2})^{\frac{3}{2}} - (v_k - \frac{\Delta v}{2})^{\frac{3}{2}} \right); & i \geq k \text{ и } j \geq k \\ 0; & i < k \text{ или } j < k \end{cases} \quad (3.19)$$

$$A_{i,j}^{3k} = \begin{cases} \frac{\Delta v}{\sqrt{v_j}}; & i \leq k \text{ и } j \geq k \\ 0; & i > k \text{ или } j < k \end{cases} \quad (3.20)$$

$$A_{i,j}^{4k} = \begin{cases} \frac{\Delta v}{\sqrt{v_i}}; & i \geq k \text{ и } j \leq k \\ 0; & i < k \text{ или } j > k \end{cases} \quad (3.21)$$

Коэффициенты A_{ij}^k получились несимметричны по индексам i и j . Проведем симметризацию, выполнив преобразования:

$$A_{ij}^k = \frac{A_{ij}^k + A_{ji}^k}{2} \quad (3.22)$$

Для выполнения закона сохранения числа частиц необходимо, чтобы сумма правых частей уравнения (3.16) давала ноль. Тогда, для коэффициентов B_i^k получаем следующее выражение:

$$B_i^j = \sum_{k=1}^N A_{ij}^k \quad (3.23)$$

Для наглядной демонстрации выполнения закона сохранения частиц рассмотрим физический смысл коэффициентов B_i^j и A_{ij}^k . Если между собой сталкиваются частицы из i -ой и j -ой частицы, то число соударений за единицу времени будет равно $n_i n_j B_i^j$, и все эти частицы разлетятся по k -м ячейкам. Причем, в k -ой ячейке будет $n_i n_j A_{ij}^k$ частиц. А это означает, что:

$$n_i n_j B_i^j = n_i n_j \sum_{k=1}^N A_{ij}^k$$

Очевидно, что это равенство равносильно выражению (3.23), полученному из формальных соображений.

3.4 Корректировка тензора столкновений

Для обеспечения выполнения закона сохранения числа частиц и энергии в системе мы должны обеспечить выполнение следующих равенств:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \sum_k n_k = \sum_{i,j} n_i n_j \sum_k A_{ij}^k - \sum_{i,j} n_i n_j B_i^j = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \sum_k n_k \cdot v_k = \sum_{i,j} n_i n_j \sum_k A_{ij}^k \cdot v_k - \sum_{i,j} n_i n_j B_i^j \cdot \frac{v_i + v_j}{2} = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Так n_i , n_j , A_{ij}^k и B_i^j неотрицательны, то эти условия равносильны следующим:

$$\begin{cases} \sum_k A_{ij}^k = B_i^j \\ \sum_k A_{ij}^k \cdot v_k = B_i^j \cdot \frac{v_i + v_j}{2} \end{cases} \quad (3.25)$$

Первое условие из системы (3.25) выполнено автоматически из определения коэффициентов B_i^j . А для выполнения второго условия потребуется выполнить

коррекцию. Скорректированные компоненты A_{ij}^k будем искать в следующем виде:

$$\tilde{A}_{ij}^k = A_{ij}^k \cdot (1 + \alpha + \beta \cdot v_k) \quad (3.26)$$

Тогда, подставляя (3.26) в (3.25) получим уравнения на коэффициенты α и β :

$$\begin{cases} \sum_k A_{ij}^k \cdot (1 + \alpha + \beta \cdot v_k) = B_i^j \\ \sum_k A_{ij}^k \cdot (1 + \alpha + \beta \cdot v_k) \cdot v_k = B_i^j \cdot \frac{v_i + v_j}{2} \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\begin{cases} \sum_k A_{ij}^k + \alpha \cdot \sum_k A_{ij}^k + \beta \cdot \sum_k A_{ij}^k \cdot v_k = B_i^j \\ \sum_k A_{ij}^k \cdot v_k + \alpha \cdot \sum_k A_{ij}^k \cdot v_k + \beta \cdot \sum_k A_{ij}^k \cdot v_k^2 = B_i^j \cdot \frac{v_i + v_j}{2} \end{cases} \quad (3.28)$$

Введем следующие обозначения:

$$a_0 = \sum_k A_{ij}^k, \quad a_1 = \sum_k A_{ij}^k \cdot v_k, \quad a_2 = \sum_k A_{ij}^k \cdot v_k^2, \quad b_1 = B_i^j \cdot \frac{v_i + v_j}{2} \quad (3.29)$$

Учитывая, что $B_i^j = \sum_k A_{ij}^k = 0$, получаем выражения для корректировочных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a_1(b_1 - a_1)}{a_1^2 - a_0 a_2} \\ \beta &= -\frac{(a_0 - b_0) + \alpha a_0}{a_1} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Теперь, когда мы нашли скорректированный вид для тензорных компонентов \tilde{A}_{ij}^k мы можем опустить знак \sim и получить консервативную систему уравнений:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = \sum_{i,j} A_{i,j}^k n_i n_j - n_k \sum_i B_i^k n_i \quad (3.31)$$

Данная система обеспечивает выполнения законов сохранения автоматически, благодаря проведенной коррекции.

Важно подчеркнуть, что значения тензорных компонентов зависят только от разбиения и не зависят от начального распределения, поэтому подсчет коэффициентов нужно проводить только один раз, что значительно уменьшает вычислительную сложность алгоритма. В следующем разделе мы продемонстрируем работу данного метода на примера задачи о релаксации газа с различными начальными функциями распределения.

4 Решение задачи о релаксации

Для демонстрации работы описанного метода будем решать задачу о релаксации газа при различных начальных условиях.

4.1 Общий алгоритм решения

Построим разностную схему для решения системы уравнений (3.31). Проведем разбиение по времени с шагом Δt :

$$\frac{n_k^{i+1} - n_k^i}{\Delta t} = I_k^i \quad (4.32)$$

Верхний индекс i обозначает номер временного слоя, а I_k^i обозначение левой части уравнения (3.31) на i -ом временном слое.

Тогда, можем получить в явном виде выражение для плотности числа частиц на следующем временном слое:

$$n_k^{i+1} = n_k^i + I_k^i \cdot \Delta t \quad (4.33)$$

Если нам известны значения n_k^0 мы сможем найти значения n_k^i на любом временном слое. Количество временных слоев заранее мы определять не будем, а остановим вычисления когда значения n_k^i выйдут на стационарное с необходимой точностью ϵ :

$$\forall k \rightarrow |n_k^{i+1} - n_k^i| < \epsilon \quad (4.34)$$

4.2 Построение общего вида допустимых начальных условий

Для проверки работоспособности предложенного метода решим задачу о релаксации газа. Для этого нужно построить начальное распределение которое сойдется к нормальному распределению:

$$f(V) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mV^2}{2kt}} \quad (4.35)$$

В безразмерном виде (обезразмеривание аналогично пункту (2.2)) она представима в более простом виде:

$$f(V) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-V} \quad (4.36)$$

Тогда, найдем начальное количество частиц и полную энергию системы по определению:

$$\begin{aligned}
n &= 4\pi \int_0^{\infty} f(V) \cdot V^2 dV \\
E &= 4\pi \int_0^{\infty} f(V) \cdot V^2 \cdot \frac{mV^2}{2} dV
\end{aligned} \tag{4.37}$$

При подстановки обезразмеренной функции распределения получаем:

$$\begin{aligned}
n &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-V^2} \cdot V^2 dV = 1 \\
E &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-V^2} \cdot V^2 \cdot V^2 dV = \frac{3}{2}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Таким образом, при составлении начальных условий задачи о релаксации газа мы будем исходить из того, что $n = 1$; $E = \frac{3}{2}$. В пространстве скоростей v_k должна быть задана дискретная функция начального распределения n_k . Зададим ее в форме "ступеньки" высотой a , началом в ячейке с номером b , заканчивающуюся в ячейки с номером $c - 1$. Тогда условие равенства начального числа частиц и энергии 1 и $\frac{3}{2}$ запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=b}^{c-1} a = a(c - b) \\
\frac{3}{2} &= \sum_{k=b}^{c-1} av_k = a \sum_{k=b}^{c-1} \left(\frac{\Delta v}{2} + k \cdot \Delta v \right) = \frac{a\Delta v(c^2 - b^2)}{2}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Отсюда получаем условия связывающие начальные параметры a, b, c :

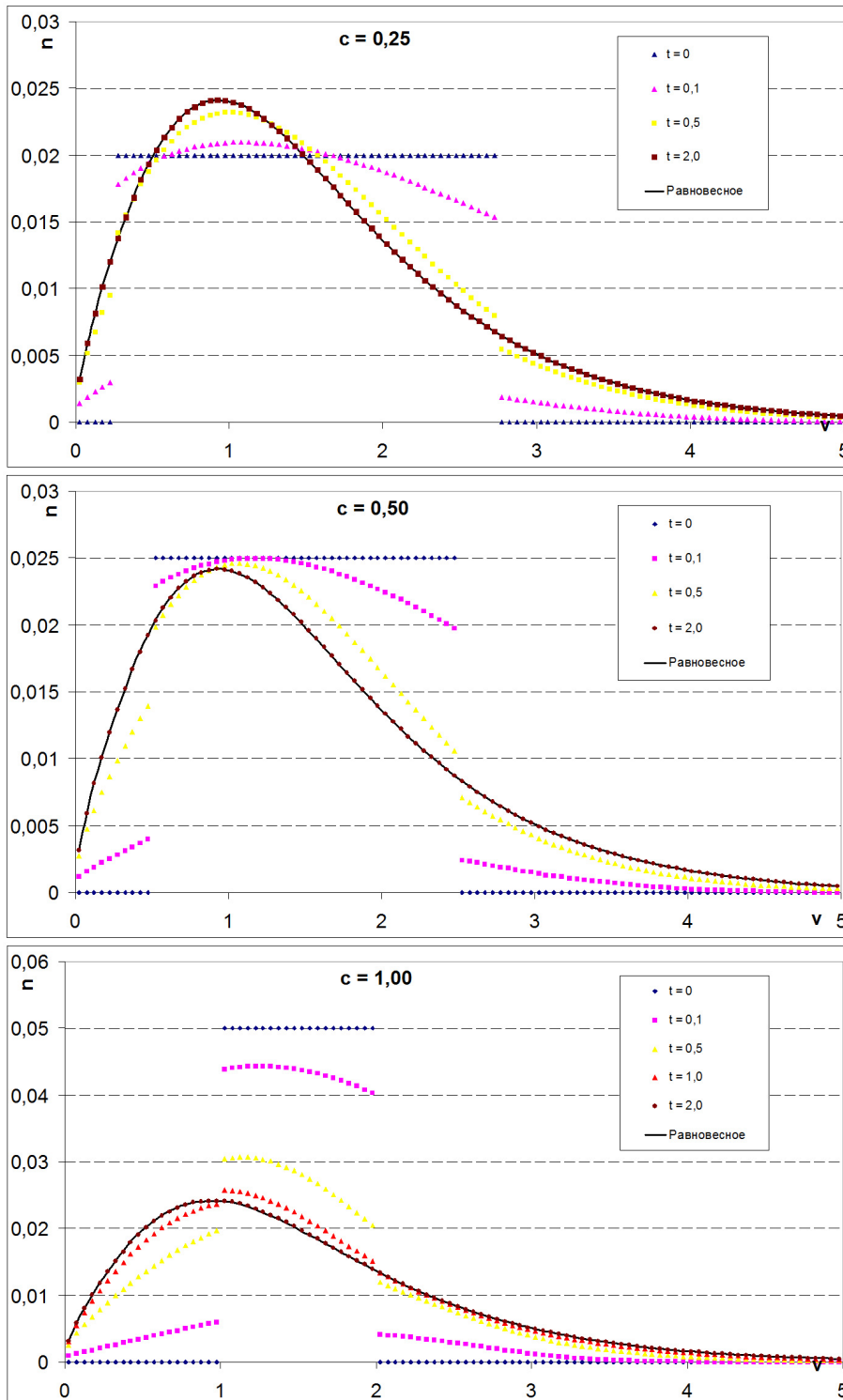
$$\begin{aligned}
c &= \frac{3}{\Delta v} - b \\
a &= \frac{1}{\frac{3}{\Delta v} - 2b}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

В следующем разделе мы приведем примеры расчета задачи о релаксации газа при различных параметрах "ступеньки"

4.3 Примеры расчета задачи о релаксации при различных начальных условиях

Разобьем пространство скоростей на $N = 100$ ячек шириной $\Delta v = 0,05$ и будем проводить релаксацию с шагом по времени $\Delta T = 0,01$.

Выход на стационарное состояние с относительной погрешностью $< 10^{-2}$ достигается при $T = 2$. Для демонстрации работы метода приведем графики показывающие релаксацию газа при различных начальных условиях. Для этого выбираем различные параметры b в ступеньке и рассчитываем допустимую "ширину" и "высоту"



Как видно из приведенных расчетов, предложенный метод работоспособен так как выходит на стационарное распределение, совпадающее с нормальным распределением.

5 Заключение

В работе был предложен метод решения кинетического уравнения Больцмана, основанный на построении его дискретной консервативной модели. Дискретный аналог интеграла столкновений был представлен в виде свертки тензора столкновений, независимого от функции начального распределения, с тензором с компонентами из средних плотностей в ячейках. Построенный таким образом дискретный оператор столкновений обладает свойством консервативности. Численная реализация дискретной модели на задаче об изотропной релаксации газа показывает, что метод обладает высоким быстродействием. Численный метод реализован для модели твердых сфер. Главной особенностью данного метода является независимость компонент тензора столкновений от функции распределения. Таким образом, компоненты тензора столкновений вычисляются один раз для разных начальных функций распределения, что значительно увеличивает быстродействие предложенного метода.

Список литературы

- [1] Рыков В.А., Арабули Г.З. Численное решение S-модельного кинетического уравнения, 2010